الرياضيات

7

التحليل (5)

4

السنة: الثالثة

الفصل: الثاني

الدكتور: نايف طلي

PLUS LIBRARY

سنكمل بمحاضرتنا هذه ببحثنا د.ت.م وسنقوم بإثبات بعد الخواص د.ت.م

2) إذا كانت f دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ فإن: $|f|$ دالة تغير محدود على $[a,b]$ ولكن العكس غير صحيح بالضرورة.

أي f د.ت.م على $[a,b] \Leftarrow |f|$ د.ت.م على $[a,b]$

الفرض: f دالة ذات تغير محدود عندئذ:

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f = \underbrace{\sup}_{p\in P[a,b]} V(f,p) < \infty$$

الطلب: $|f|$ دالة ذات تغير محدود عندئذ:

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} |f| = \underbrace{\sup}_{p\in P[a,b]} V(f,p) < \infty$$

الإثبات: بفرض f دالة تغير محدود على $[a,b]$ عندئذ:

من أجل أي تجزئة: $P = \{x_0, \dots, x_n ; x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b\}$ فإن:

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f = \sup_{p\in P[a,b]} \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| < +\infty$$

ولنبرهن على أن: $\overset{b}{\underset{a}{V}} |f| < +\infty$

$$V(|f|,p) = \sum_{k=1}^{n} \big||f(x_k)| - |f(x_{k-1})|\big|$$

حسب الخاصية $\big||a| - |b|\big| \le |a-b|$ فإن:

$$\big||f(x_k)| - |f(x_{k-1})|\big| \le |f(x_k) - f(x_{k-1})| \ ; x_k , x_{k-1} \in P$$

وهي صحيحة من أجل $1 \le k \le n$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \big||f(x_k)| - |f(x_{k-1})|\big| \le \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \le \overset{b}{\underset{a}{V}} f$$

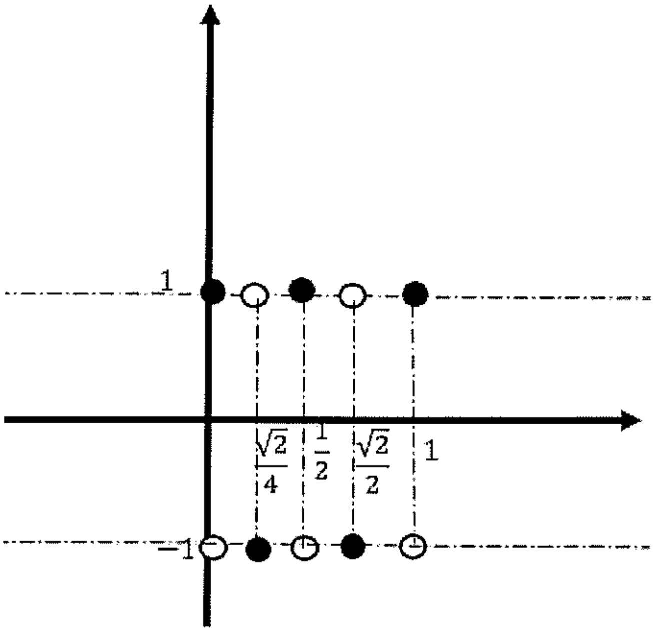
$$\Rightarrow \overset{b}{\underset{a}{V}} |f| = \sup_{p\in P[a,b]} \sum_{k=1}^{n} \big||f(x_k)| - |f(x_{k-1})|\big| \le \overset{b}{\underset{a}{V}} f < +\infty$$

وعليه فإن الدالة $|f|$ ذات تغير محدود.

العكس: غير صحيح بالضرورة والمثال:

اذا كانت الدالة f المعرفة على $[0,1]$ كما يلي

$$f(x)=\begin{cases} 1 & ; x\in\mathbb{Q} \\ -1 & ; x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$$



والمطلوب:

1) بين أن $|f|$ د.ت.م على $[0,1]$

2) بين أن f ليست د.ت.م على $[0,1]$

الحل:

1) $|f(x)|=1$ وذلك $\forall x\in[0,1]$

$\overset{1}{\underset{0}{\mathrm{V}}}|f|=0$ دالة ثابتة

$\Leftarrow f$ د.ت.م على $[0,1]$

2) لنأخذ التجزئة:

$$P=\{\underbrace{x_0}_{x_0\in\mathbb{Q}}=0<\underbrace{x_1}_{x_1\notin\mathbb{Q}}<\underbrace{x_2}_{x_2\in\mathbb{Q}}<\cdots<\underbrace{x_{n-1}}_{x_{n-1}\notin\mathbb{Q}}<\underbrace{x_n}_{x_n\in\mathbb{Q}}=1\}$$

$$\begin{aligned} V(f,P)&=|f(x_1)-f(x_0)|+|f(x_2)-f(x_1)|+\cdots+|f(x_n)-f(x_{n-1})| \\ &=|-1-1|+|1-(-1)|+\cdots+|1-(-1)| \\ &=\underbrace{2+2+\cdots+2}_{n\text{ مرة}}=2n \end{aligned}$$

$$\overset{1}{\underset{0}{\mathrm{V}}}f=\underbrace{\sup}_{p\in P[0,1]}(2n)=\lim_{n\to\infty}2n=\infty$$

$\Leftarrow f$ ليست د.ت.م على المجال $[0,1]$

---

3) إذا كانت الدالة f د.ت.م على $[a,b]$ فإن αf دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ حيث $\alpha\in\mathbb{R}$.

الفرض: f دالة ذات تغير محدود عندئذ:

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}f=\underbrace{\sup}_{p\in P[a,b]}V(f,p)<\infty$$

الطلب: αf دالة ذات تغير محدود عندئذ:

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\alpha f=\underbrace{\sup}_{p\in P[a,b]}V(f,p)<\infty$$

الإثبات:

لنأخذ التجزئة: $P = \{x_0 = a , x_1, \dots , x_n = b \ ; x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n\}$

$$V(\alpha f , p) = \sum_{k=1}^{n} |(\alpha f)(x_k) - (\alpha f)(x_{k-1})|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |\alpha f(x_k) - \alpha f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} |\alpha|.|f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

$$= |\alpha| \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = |\alpha| \cdot V(f, p)$$

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} (\alpha f) = |\alpha| \sup_{p\in P[a,b]} \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} (\alpha f) = |\alpha|.\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} (f) < +\infty$$

ومنه الدالة (αf) ذات تغير محدود.

---

4) إذا كانت الدالة f ذات تغير محدود على $[a, b]$ فإن $\frac{1}{f}$ دالة ذات تغير محدود على $[a, b]$ حيث $\forall x \in [a, b]: \ |f(x)| \geq c > 0$

الفرض: f دالة ذات تغير محدود عندئذ:

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f = \underbrace{\sup}_{p\in P[a,b]} \ V(f, p) < \infty$$

الطلب: $\frac{1}{f}$ دالة ذات تغير محدود عندئذ:

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} \frac{1}{f} = \underbrace{\sup}_{p\in P[a,b]} \ V(f, p) < \infty$$

الاثبات: لنأخذ التجزئة: $P = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}$

ولنثبت أن $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} \frac{1}{f} < \infty$ علماً أن f دالة ذ.ت.م أي $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f < \infty$.

$$V\left(\frac{1}{f} , p\right) = \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{1}{f(x_k)} - \frac{1}{f(x_{k-1})}\right|$$

بتوحيد المقامات

$$= \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{f(x_{k-1}) - f(x_k)}{f(x_k) \cdot f(x_{k-1})}\right| = \sum_{k=1}^{n} \frac{|f(x_k) - f(x_{k-1})|}{|f(x_k)| \cdot |f(x_{k-1})|} \dots (*)$$

ولكن حسب الفرض: $\forall x \in [a, b]: |f(x)| \geq c > 0 \Rightarrow \frac{1}{|f(x)|} \leq \frac{1}{c}$

ومنه $\frac{1}{c^2}=\frac{1}{c}\cdot\frac{1}{c}\geq\frac{1}{|f(x_k)|}\cdot\frac{1}{|f(x_{k-1})|}$ فلنعوض في $(*)$:

$$V\left(\frac{1}{f},p\right)\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{|f(x_k)-f(x_{k-1})|}{c^2}=\frac{1}{c^2}\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|$$

$$V\left(\frac{1}{f},p\right)\leq\frac{1}{c^2}\cdot V(f,p)\leq\frac{1}{c^2}\overset{b}{\underset{a}{\vee}}f$$

$$\Rightarrow\overset{b}{\underset{a}{\vee}}\frac{1}{f}\leq\frac{1}{c^2}\overset{b}{\underset{a}{\vee}}f<+\infty$$

ومنه $\frac{1}{f}$ دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ ضمن الشروط المعطاة.

---

5) إذا كانت $f\ ,g$ دالتين كل منهما ذات تغير محدود على $[a,b]$ فإن:

a) $f+g$ دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$.

b) $f-g$ دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$.

c) $f\cdot g$ دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$.

d) $\frac{f}{g}$ دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$.

$$\forall x\in[a,b]: g(x)\neq 0, |g(x)|\geq c>0$$

البرهان: (قام الدكتور بحل a فقط وابقى البقية وظيفة)

a)لنأخذ التجزئة:

$$P=\{x_0=a<x_1<x_2<\cdots<x_n=b\}$$

ولدينا $\overset{b}{\underset{a}{\vee}}g<\infty$ وَ $\overset{b}{\underset{a}{\vee}}f<\infty$ ولنبرهن أن $\overset{b}{\underset{a}{\vee}}(f+g)<\infty$

$$V(f+g\ ,p)=\sum_{k=1}^{n}|(f+g)(x_k)-(f+g)(x_{k-1})|$$

$$=\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)+g(x_k)-f(x_{k-1})-g(x_{k-1})|$$

$$=\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})+g(x_k)-g(x_{k-1})|$$

$$V(f+g\ ,p)\leq\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|+\sum_{k=1}^{n}|g(x_k)-g(x_{k-1})|$$

وذلك حسب خاصة في القيمة المطلقة: $|a+b|\leq|a|+|b|$ وحسب خاصية في المجاميع المنتهية:

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma \cdot (\alpha_i + \beta_i) = \gamma \left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \right]$$

$$V(f+g\,,p) \leq \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| + \sum_{k=1}^{n} |g(x_k) - g(x_{k-1})|$$

$$\leq V(f,p) + V(g,p) \leq \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) + \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(g) \;\; \forall p \in \mathbb{P}[a,b]$$

$$\Rightarrow \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f+g) = \sup_{p \in \mathbb{P}[ab]} V(f+g,p) \leq \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f + \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} g < \infty$$

ومنه $f + g$ دالة تغير محدود على $[a,b]$.

b) بما أن g دالة ذات تغير محدود فحسب مبرهنة (αg) دالة ذات تغير محدود ومن أجل $\alpha = -1$ نجد أن $(-g)$ دالة ذات تغير محدود وبالتالي $\big(f + (-g)\big) = f - g$ دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$.

c) لتكن P تجزئة لـ $[a,b]$ حيث $P \in \mathbb{P}$:

$$P = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}$$

ولدينا $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} g < \infty$ و $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f < \infty$ ولنبرهن أن $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f \cdot g) < \infty$

$$V(f \cdot g\,,p) = \sum_{k=1}^{n} |(f \cdot g)(x_k) - (f \cdot g)(x_{k-1})|$$

$$V(f \cdot g\,,p) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) \cdot g(x_k) - f(x_{k-1}) \cdot g(x_{k-1})|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) \cdot g(x_k) - \boldsymbol{f(x_{k-1}) \cdot g(x_k)} + \boldsymbol{f(x_{k-1}) \cdot g(x_k)} - f(x_{k-1}) \cdot g(x_{k-1})|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |g(x_k) \cdot [f(x_k) - f(x_{k-1})] + f(x_{k-1}) \cdot [g(x_k) - g(x_{k-1})]|$$

$$V(f \cdot g\,,p) \leq \sum_{k=1}^{n} \left| g(x_k) \cdot \big(f(x_k) - f(x_{k-1})\big) \right| + \sum_{k=1}^{n} \left| f(x_{k-1}) \cdot \big(g(x_k) - g(x_{k-1})\big) \right|$$

$$V(f \cdot g\,,p) \leq \sum_{k=1}^{n} |g(x_k)| \left| \big(f(x_k) - f(x_{k-1})\big) \right| + \sum_{k=1}^{n} |f(x_{k-1})| \left| \big(g(x_k) - g(x_{k-1})\big) \right|$$

$f(x)$, $g(x)$ دالتين د.ت.م على $[a,b]$ فحسب مبرهنة تكون f, g محدودتان على $[a,b]$:

$$\exists\, M > 0\,;\; \forall\, x \in [a,b] : |f(x)| \leq M$$

$$\exists\, L > 0\,;\; \forall\, x \in [a,b] : |g(x)| \leq L$$

$$\Rightarrow V(f\cdot g\ ,p)\le L.\sum_{k=1}^{n}\left|\left(f(x_k)-f(x_{k-1})\right)\right|+M.\sum_{k=1}^{n}\left|\left(g(x_k)-g(x_{k-1})\right)\right|$$

$$V(f\cdot g\ ,p)\le L\cdot V(f,p)+M\cdot V(g\ ,p)$$

$$\Rightarrow \mathop{\mathrm{V}}_{a}^{b}(f\cdot g)\le L\cdot \mathop{\mathrm{V}}_{a}^{b}(f)+M\cdot \mathop{\mathrm{V}}_{a}^{b}(g)<\infty$$

ومنه $(f\cdot g)$ دالة ذات تغير محدود على المجال $[a,b]$.

$d)$ بما أن g دالة ذات تغير محدود فإنه حسب المبرهنة $\frac{1}{g}$ دالة تغير محدود بحيث

$$(\forall\ x\in[a,b]: g(x)\neq 0\ ,|g(x)|\ge c>0)$$

وبالتالي $\left(f\cdot\frac{1}{g}\right)$ دالة تغير محدود حسب (c) ومنه $\frac{f}{g}=\left(f\cdot\frac{1}{g}\right)$ دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$.

انتهت المحاضرة

إعداد: عبد الرحمن خادم الجامع، سمير الحاج علي.

Math Mad Team